

# LES VECTEURS DE WITT ET L'ALGÈBRE UNIVERSELLE, D'APRÈS JOYAL

LUC BÉLAIR

RÉSUMÉ. L'algèbre universelle et la théorie des catégories donnent un éclairage particulier sur l'anneau des vecteurs de Witt. Je vais illustrer ces idées à l'aide de l'exemple plus familier de l'anneau des séries formelles, en faisant le parallèle avec les vecteurs de Witt. Je ferai un rappel des notions utilisées sur les catégories. On peut dire que l'idée essentielle est que le foncteur « anneau des vecteurs de Witt » est un foncteur adjoint.

Abstract. Universal algebra and category theory shed some light on the ring of Witt vectors. I illustrate these ideas with the more familiar example of formal power series ring, while drawing the parallel with Witt vectors. I recall the appropriate notions from categories. One can say that the essential idea is that the « Witt vector functor » is an adjoint.

## §.1 Introduction

## §.2 Adjonction, foncteurs adjoints

## §.3 Exemples

## 1. INTRODUCTION

Il y a plusieurs façons de voir les vecteurs de Witt et les séries formelles. Pour les besoins de cet exposé, nous allons prendre comme point de départ le fait qu'étant donné un corps  $k$ , ils répondent ensemble à la question de la structure des anneaux de valuation discrète complets  $\mathcal{O}$  dont le corps résiduel soit  $k$  :

- si  $k$  est de caractéristique 0, alors  $\mathcal{O} \simeq k[[T]]$ , l'anneau des séries formelles entières à coefficients dans  $k$  ;
- si  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , alors :
  - soit  $\mathcal{O} \simeq k[[T]]$ , comme ci-dessus ;
  - soit  $\mathcal{O} \simeq W[k]$ , l'anneau des vecteurs de Witt sur  $k$ , qui est un anneau de caractéristique 0, et dont  $p$  engendre l'idéal maximal, ou encore  $\mathcal{O}$  est isomorphe à une extension algébrique finie entière de  $W[k]$ <sup>1</sup>.

Dans le cas de  $W[k]$ , si on fixe un ensemble de représentants du corps résiduel alors tout  $x \in W[k]$  se représente de façon unique par une série

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots$$

---

Séminaire de structures algébriques ordonnées, Univ. Paris 7, le 16 mars 2010.

1. Donnée par un polynôme d'Eisenstein.

où les  $a_i$  appartiennent à l'ensemble de représentants fixé. Cela met en évidence l'analogie avec les séries formelles<sup>2</sup>.

Dans cet exposé tous les anneaux seront commutatifs unitaires. L'anneau des séries formelles possède une structure supplémentaire fournie par l'opération de dérivation formelle par rapport à l'indéterminée. Pour les besoins de notre discussion nous allons passer à un anneau de coefficients, et nous allons supposer que cet anneau est de caractéristique 0 et que les entiers y sont inversibles. Soit donc  $A$  un tel anneau commutatif unitaire, on considère  $A[[T]]$  et l'opération  $D_T = \frac{d}{dT}$  sur  $A[[T]]$  :

$$D_T : A[[T]] \rightarrow A[[T]]$$

$$D_T\left(\sum_n a_n T^n\right) = \sum_n n a_n T^{n-1}$$

où  $a_n \in A$ . L'opérateur  $D_T$  satisfait les identités habituelles :

$$(D1) \quad D_T(x + y) = D_T(x) + D_T(y)$$

$$(D2) \quad D_T(xy) = D_T(x)y + xD_T(y)$$

$$(D3) \quad D_T(1) = 0.$$

Un appelle *anneau différentiel* un anneau muni d'une opération qui satisfait les identités (D1), (D2), (D3), et on dit alors que cette opération est une dérivation sur l'anneau donné. Nous allons habituellement désigner un anneau différentiel par un couple  $(B, D)$  où  $B$  sera l'anneau sous-jacent et  $D$  la dérivation.

Il se trouve que  $(A[[T]], D_T)$  joue un rôle particulier par rapport aux dérivations sur  $A$ . Désignons par  $\varepsilon_A$  l'application de  $A[[T]]$  dans  $A$  qui associe à une série son terme constant, i.e.  $\varepsilon_A(\sum a_i T^i) = a_0$ . On a les deux propriétés clé suivantes.

- (I) *Soit un anneau différentiel  $(B, D)$ . Alors pour tout homomorphisme d'anneaux  $B \xrightarrow{\varphi} A$ , il existe un unique homomorphisme d'anneaux différentiels  $(B, D) \xrightarrow{\bar{\varphi}} (A[[T]], D_T)$  tel que  $\varepsilon_A \circ \bar{\varphi} = \varphi$ .*

En effet, il s'agit de prendre

$$\bar{\varphi}(b) = \sum_n \frac{\varphi(D^n(b))}{n!} T^n$$

Vérifions l'unicité. Supposons  $\bar{\varphi}$  un morphisme différentiel tel que  $\varepsilon_A \circ \bar{\varphi} = \varphi$ . Disons  $\bar{\varphi}(b) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$ . On a  $a_0 = \varphi(b)$ , car  $\varepsilon_A(\bar{\varphi}(b)) = \varphi(b)$ . Mais  $\bar{\varphi}$  est aussi un morphisme différentiel, donc  $\bar{\varphi}(D(b)) = D_T(\bar{\varphi}(b))$ , et alors  $\varepsilon_A(\bar{\varphi}(D(b))) = \varepsilon_A(D_T(\sum a_i T^i))$ , d'où  $\varphi(D(b)) = a_1$ . De même on doit avoir  $\bar{\varphi}(D^2(b)) = D_T^2(\bar{\varphi}(b))$ , et alors  $\varepsilon_A(\bar{\varphi}(D^2(b))) = \varepsilon_A(D_T^2(\sum a_i T^i))$ , d'où  $\varphi(D^2(b)) = 2a_2$ , et ainsi de suite.

- (II) *La donnée d'une dérivation sur  $A$  est équivalente à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux de  $A$  dans  $A[[T]]$ .*

En effet, si on a une dérivation  $D$  sur  $A$ , alors on obtient un homomorphisme de  $A$  dans  $A[[T]]$  par la propriété (I) avec  $\varphi =$  l'application identité de  $A$ .

---

2. Pour les propriétés de base des vecteurs de Witt, voir P. Ribenboim, *L'arithmétique des corps*, 1972, ou J.-P. Serre, *Corps locaux*, 1968.

Réciproquement, si on a un homomorphisme d'anneaux  $A \xrightarrow{h} A[[T]]$ , alors on vérifie directement que  $D = \varepsilon_A \circ D_T \circ h$  est une dérivation sur  $A$ .

Il se trouve qu'il y a un phénomène semblable dans les vecteurs de Witt par rapport à une opération dite de *p-dérivation*. Si  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ , il y a dans  $W[k]$  un système de représentants multiplicatifs, et alors dans la représentation en séries avec ces représentants on obtient l'automorphisme dit *de Frobenius*

$$f_p : W[k] \rightarrow W[k]$$

$$f_p(\sum a_i p^i) = \sum a_i^p p^i$$

On note qu'on a toujours  $f_p(x) \equiv x^p$  modulo  $p$ . On définit alors l'opération

$$\delta_p(x) = \frac{f_p(x) - x^p}{p}$$

qui satisfait les identités suivantes

$$(\delta 1) \quad \delta_p(x + y) = \delta_p(x) + \delta_p(y) - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} x^{p-i} y^i$$

$$(\delta 2) \quad \delta_p(xy) = \delta_p(x)y^p + x^p\delta_p(y) + p\delta_p(x)\delta_p(y)$$

$$(\delta 3) \quad \delta_p(1) = 0.$$

Un appelle *delta-anneau* (relatif à  $p$ ), un anneau muni d'une opération qui satisfait les identités  $(\delta 1)$ ,  $(\delta 2)$ ,  $(\delta 3)$ , et on dit alors que cette opération est une *p-dérivation* sur l'anneau donné. La construction des vecteurs de Witt, et les considérations ci-dessus, se généralisent aux anneaux et on a un phénomène pour  $(W[A], \delta_p)$  par rapport aux *p-dérivations* sur  $A$ , semblable au phénomène observé dans le cas différentiel.

Le but de cet exposé est de mettre ces phénomènes dans un contexte général. Dans le cas des vecteurs de Witt, c'est Joyal<sup>3</sup> qui a mis ces phénomènes structuraux en évidence. Nous ne faisons ici que détailler certains éléments de son article, et indiquer d'autres exemples. Grosso modo, dans le cas des séries formelles, l'essentiel du phénomène se résume à ce que le foncteur d'oubli de la catégorie des anneaux différentiels dans la catégorie des anneaux possède un adjoint à droite, qui coïncide avec le foncteur « anneau de séries formelles » dans le cas que nous avons considéré.

## 2. ADJONCTION, FONCTEURS ADJOINTS

Nous rappelons quelques définitions et résultats sur les foncteurs adjoints.<sup>4</sup>

**Définition 1** (Adjonction). *Soient  $\underline{A}, \underline{X}$  des catégories. Une adjonction de  $\underline{X}$  dans  $\underline{A}$  est un triplet  $(F, G, \phi)$  où  $\underline{X} \xrightarrow{F} \underline{A}$ ,  $\underline{A} \xrightarrow{G} \underline{X}$  sont des foncteurs et pour chaque couple d'objets  $X \in \text{Obj}(\underline{X})$ ,  $A \in \text{Obj}(\underline{A})$ ,  $\phi_{X,A}$  est une bijection*

$$\text{Hom}_{\underline{X}}(X, GA) \simeq_{\phi_{X,A}} \text{Hom}_{\underline{A}}(FX, A)$$

3. A. Joyal,  $\delta$ -anneaux et vecteurs de Witt, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada VII (1985) 177-182; voir aussi du même auteur,  $\delta$ -anneaux et  $\lambda$ -anneaux, ibid. pp. 227-232.

4. Voir par exemple Jaffard-Poitou, *Introduction aux catégories et aux problèmes universels*, 1971, ou S. MacLane, *Categories for the working mathematicians*, 1971.

naturelle en  $X$  et  $A$ .

On dit alors que  $F$  est un adjoint à gauche de  $G$  et que  $G$  est un adjoint à droite de  $F$ . À isomorphisme de foncteurs près, un foncteur a au plus un adjoint à droite et au plus un adjoint à gauche.

**Exemple 1.** Soient  $\underline{A} = \text{Ab}$ , la catégorie des groupes abéliens, et  $\underline{X} = \text{Ens}$ , la catégorie des ensembles, alors  $F : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$  le foncteur groupe abélien libre est un adjoint à gauche de  $G = U : \text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$  le foncteur d'oubli. La naturalité des bijections en jeu est que pour tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  dans  $\text{Ens}$  et tout morphisme  $A \xrightarrow{\varphi} B$  dans  $\text{Ab}$ , le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\text{Ens}}(X, UA) & \xrightarrow[\phi_{X,A}]{} & \text{Hom}_{\text{Ab}}(FX, A) \\
 \text{Hom}(f) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}(F(f)) \\
 \text{Hom}_{\text{Ens}}(Y, UA) & \xrightarrow[\phi_{Y,A}]{} & \text{Hom}_{\text{Ab}}(FY, A) \\
 \text{Hom}(U(\varphi)) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\varphi) \\
 \text{Hom}_{\text{Ens}}(Y, UB) & \xrightarrow[\phi_{Y,B}]{} & \text{Hom}_{\text{Ab}}(FY, B)
 \end{array}$$

**Exemple 2.** Soient  $\underline{A} =$  une variété de l'algèbre universelle vue comme catégorie, et  $\underline{X} = \text{Ens}$ , la catégorie des ensembles, alors  $F : \text{Ens} \rightarrow \underline{A}$  le foncteur algèbre libre est un adjoint à gauche de  $G = U : \underline{A} \rightarrow \text{Ens}$  le foncteur d'oubli.

**Exemple 3.** Soient  $\underline{A} =$  la catégorie des corps, et  $\underline{X} =$  la catégorie des anneaux intègres, alors  $F =$  le foncteur corps des fractions est un adjoint à gauche de  $G = U$  le foncteur d'oubli.

**Exemple 4.** Soient  $\underline{A} = \underline{X} = \text{Ab}$ , la catégorie des groupes abéliens. Fixons un groupe abélien  $M$ . Alors  $F = \_ \otimes M$  le foncteur produit tensoriel par  $M$  est un adjoint à gauche de  $G = \text{Hom}_{\text{Ab}}(M, \_)$  le foncteur  $\text{Hom}$  de source  $M$ .

**Exemple 5.** Fixons  $X, Y$  des ensembles, et soit  $\pi : X \times Y \rightarrow X$  la projection. Considérons les ensembles de parties avec l'inclusion  $(\mathcal{P}(X \times Y), \subseteq)$  et  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  comme catégories, c'est-à-dire  $A \rightarrow B$  ssi  $A \subseteq B$ . Un foncteur est alors une fonction croissante par rapport à  $\subseteq$ . On a les trois foncteurs suivants.

- (1)  $\pi^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X \times Y)$ ,  $\pi^*(A) = \pi^{-1}(A)$  l'image réciproque ;
- (2)  $\pi_* : \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,  $\pi_*(B) = \pi(B) = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in B\}$  l'image directe ;
- (3)  $\pi_{\forall} : \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,  $\pi_{\forall}(B) = \{x \in X : \forall y \in Y, (x, y) \in B\}$  ;

On a que  $\pi_*$  est un adjoint à gauche de  $\pi^*$ , et  $\pi_{\forall}$  est un adjoint à droite de  $\pi^*$ .

Une adjonction fournit deux familles de flèches clé.

**Exemple 6.** Revenons à l'adjonction du foncteur groupe abélien libre  $F : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$  et du foncteur d'oubli  $U : \text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$ . Soient  $X$  un ensemble et  $A$  un groupe abélien. On a

$$\text{Hom}_{\text{Ens}}(X, UA) \xrightarrow{\cong_{\phi_{X,A}}} \text{Hom}_{\text{Ab}}(FX, A)$$

En particulier,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X, UFX) \xrightarrow{\cong}_{\phi_{X, FX}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(FX, FX)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(UA, UA) \xrightarrow{\cong}_{\phi_{UA, A}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(FUA, A)$$

On a les flèches « naturelles » suivantes

$$\eta_X : X \rightarrow UFX$$

$$x \mapsto x \ll \text{éléments de la base} \gg$$

$$\varepsilon_A : FUA \rightarrow A$$

$$a \mapsto a \ll \text{prolongé par linéarité} \gg$$

qui sont associées à l'adjonction :  $\eta_X = \phi_{X, FX}^{-1}(id_{FX})$ ,  $\varepsilon_A = \phi_{UA, A}(id_A)$ . On retrouve, par exemple, la propriété universelle de  $\eta_X$  que pour toute fonction  $X \xrightarrow{g} UA$  il existe un unique homomorphisme  $FX \xrightarrow{\bar{g}} A$  tel que  $U\bar{g} \circ \eta_X = g$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & UFX \\ \forall g \downarrow & & \downarrow \exists! U\bar{g} \\ UA & \xlongequal{\quad} & UA. \end{array}$$

Les adjonctions sont liées de près aux limites et colimites dans les catégories.

**Proposition 1.** *Un foncteur qui possède un adjoint à droite préserve toute (petite) colimite. Un foncteur qui possède un adjoint à gauche préserve toute (petite) limite.*

**Exemple 7.** *Le foncteur produit tensoriel  $\_ \otimes M$  ci-dessus possède l'adjoint à droite  $\mathrm{Hom}(M, \_)$ , et il préserve les sommes directes, c'est-à-dire :*

$$\left( \bigoplus_{i \in I} H_i \right) \otimes M \simeq \bigoplus_{i \in I} (H_i \otimes M)$$

**Exemple 8.** *Le foncteur d'oubli  $U : \mathrm{Ab} \rightarrow \mathrm{Ens}$  ci-dessus possède l'adjoint à gauche groupe abélien libre, et il préserve les produits directs, c'est-à-dire :*

$$U\left(\prod_{i \in I} H_i\right) \simeq \prod_{i \in I} U(H_i)$$

**Exemple 9.** *Le foncteur image réciproque  $\pi^*$  ci-dessus possède un adjoint à gauche  $(\pi_*)$  et un adjoint à droite  $(\pi_\vee)$ , et il préserve toutes les opérations booléennes, même infinies.*

**Théorème 1** (Critère d'adjonction de Freyd).<sup>5</sup> Soit  $\underline{X}, \underline{A}$  des catégories telles que  $\underline{X}$  possède toute (petite) colimite et  $\text{Hom}(A, B)$  est toujours un ensemble. Soit  $U : \underline{X} \rightarrow \underline{A}$  un foncteur. Alors  $U$  possède un adjoint à droite s'il satisfait les conditions suivantes :

- (1) La condition de Freyd, qui est toujours satisfaite pour un foncteur d'oubli d'une variété de l'algèbre universelle.
- (2) Le foncteur  $U$  préserve toute (petite) colimite.

**Lemme 1.** Toute variété de l'algèbre universelle avec au moins une constante possède toute petite colimite.

Preuve. Grosso modo, on a les équivalences suivantes :

- toujours : colimites  $\leftrightarrow$  coproduits + coégalisateurs
- alg. univ. :  $\leftrightarrow$  colimites finies + limites inductives filtrantes
- $\leftrightarrow$  coproduits finis + coégalisateurs + limites inductives filtrantes
- $\leftrightarrow$  co-(produits fibrés)<sup>6</sup> + objet initial + limites inductives filtrantes

La deuxième équivalence peut se justifier par le fait qu'une algèbre est toujours limite inductive filtrante de ses sous-algèbres finiment engendrées. Par ailleurs on a,

- objet initial : l'algèbre libre engendrée par les constantes ;
- limites inductives filtrantes : comme dans les ensembles, en prenant la congruence appropriée ;
- co-produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \amalg_A C \end{array}$$

pour ceux-ci on peut procéder de la façon suivante. On considère d'abord le cas où on a des algèbres libres, disons  $A = F(X_A), B = F(X_B), C = F(X_C)$ . Alors  $B \amalg_A C = F(X_B \cup X_C) / \Theta_A$ , où  $\Theta_A$  est la congruence appropriée qui identifie les images des éléments de  $A$ . On traite ensuite le cas général en utilisant le fait que toute algèbre est un quotient d'une algèbre libre par une congruence.

□

Puisque les limites inductives filtrantes de l'algèbre universelle se construisent comme dans les ensembles on obtient que les foncteurs d'oubli les préservent toujours. Ainsi, pour les foncteurs d'oubli de l'algèbre universelle, le critère de Freyd se ramène à la condition suivante.

**Proposition 2.** Soient  $\underline{X}, \underline{A}$  des variétés de l'algèbre universelle et  $U : \underline{X} \rightarrow \underline{A}$  un foncteur d'oubli. Alors  $U$  possède un adjoint à droite si  $U$  préserve les co-produits fibrés et l'objet initial.

L'observation suivante sera utile.

5. Voir MacLane (ibid.), chap. V, section 6.

6. Sommes amalgamées, i.e. le dual des produits fibrés.

**Lemme 2.** Soient  $\underline{X}, \underline{A}$  des variétés de l'algèbre universelle et  $U : \underline{X} \rightarrow \underline{A}$  un foncteur d'oubli. Soit  $\underline{X}[t_0]$  l'algèbre libre dans  $\underline{X}$  à un générateur  $t_0$ . Supposons que  $U$  possède un adjoint à droite  $\Upsilon$ . Alors  $\Upsilon$  peut être représenté par  $U(\underline{X}[t_0])$ .

Preuve. En effet, pour tout objet  $X$  dans  $\underline{X}$  on a

$$X \simeq \text{Hom}_{\underline{X}}(\underline{X}[t_0], X).$$

En particulier, on obtient

$$\begin{aligned} \Upsilon(A) &\simeq \text{Hom}_{\underline{X}}(\underline{X}[t_0], \Upsilon(A)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\underline{A}}(U(\underline{X}[t_0]), A). \end{aligned}$$

□

### 3. EXEMPLES

**3.1. Dérivations et séries formelles.** Soient  $\underline{A}$  la catégories des anneaux,  $\underline{ADIFF}$  la catégories des anneaux différentiels, et  $U : \underline{ADIFF} \rightarrow \underline{A}$  le foncteur d'oubli.

L'algèbre libre à un générateur  $t_0$  dans  $\underline{ADIFF}$  est donné par l'anneau

$$\mathbb{Z}[t_0]_D = \mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2, \dots]$$

$$Dt_0 = t_1, Dt_i = t_{i+1}$$

où les  $t_i$  sont des indéterminées. Notons que  $D^n t_0 = t_n$ . L'objet initial dans  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}$ . L'objet initial dans  $\underline{ADIFF}$  est  $(\mathbb{Z}, D)$ , avec  $D$  la dérivation nulle. On a donc  $U((\mathbb{Z}, D)) = \mathbb{Z}$ , et  $U$  préserve l'objet initial. Le co-produitfibré dans  $\underline{A}$  est donné par le produit tensoriel. On note alors le phénomène suivant.

**Lemme 3.** Supposons  $(A, D_A), (B, D_B), (C, D_C)$  des anneaux différentiels, et  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$  des homomorphismes différentiels. Soient les homomorphismes naturels d'anneaux qui s'ensuivent  $i_1 : B \rightarrow B \otimes_A C$  et  $i_2 : C \rightarrow B \otimes_A C$ . Alors il existe une dérivation  $D$  sur  $B \otimes_A C$ , et une seule, telle que  $i_1, i_2$  soient des homomorphismes différentiels.

Preuve. On a

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \otimes_A C \end{array}$$

et  $D_B, D_C$  sont des applications additives. On obtient alors les applications additives  $D_B \otimes id_C$  et  $id_B \otimes D_C$ . Posons

$$D = D_B \otimes id_C + id_B \otimes D_C$$

On sait déjà que cette application est additive. D'autre part, on note que

$$D(b \otimes c) = D_B(b) \otimes c + b \otimes D_C(c)$$

et on vérifie directement que  $D$  est une dérivation. □

On voit qu'il suit de ce lemme que dans  $\underline{ADIFF}$  les co-produitfibrés sont donnés par les produits tensoriels, et que  $U$  préserve les co-produitfibrés.

Ainsi, par la discussion précédente,  $U$  possède un adjoint à droite, disons  $\Upsilon$ , et cet adjoint peut être représenté par  $U(\mathbb{Z}[t_0]_D) = \mathbb{Z}[t_0, t_1, \dots]$ .

Considérons donc

$$\begin{aligned}\Upsilon(A) &\simeq \text{Hom}_{\underline{ADIFF}}(\mathbb{Z}[t_0]_D, \Upsilon(A)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\underline{ADIFF}}(U(\mathbb{Z}[t_0]_D), A) \\ &\simeq \text{Hom}_{\underline{A}}(\mathbb{Z}[t_0, t_1, \dots], A) \\ &\simeq A^{\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Ainsi  $\Upsilon(A)$  peut être représenté par les suites  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  d'éléments de  $A$ , le terme  $a_i$  correspondant à  $t_i$  dans l'identification ci-dessus.

On a l'homomorphisme  $\varepsilon_A = \phi_{\Upsilon A, A}(id_{\Upsilon A})$  déjà vu

$$\varepsilon_A : U\Upsilon A \rightarrow A$$

qui dans la représentation est donné par

$$\varepsilon_A(a_0, a_1, a_2, \dots) = a_0$$

Disons  $x \in \Upsilon(A)$  représenté par la suite  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ , alors dans l'identification ci-dessus on a  $D^i x$  et  $D^i t_0 = t_i$  qui se correspondent et on a

$$\varepsilon_A(D^n x) = a_n$$

De même dans l'adjonction

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\underline{ADIFF}}(B, \Upsilon(A)) &\simeq \text{Hom}_{\underline{A}}(U(B), A) \\ \bar{\varphi} &\longleftrightarrow \varphi\end{aligned}$$

on a dans la représentation ci-dessus

$$\bar{\varphi}(b) = (\varphi(b), \varphi(Db), \varphi(D^2b), \dots)$$

On a le phénomène observé au début de notre exposé :

*La donnée d'une dérivation sur un anneau  $A$  est équivalente à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux de  $A$  dans  $\Upsilon(A)$ .*

En effet, si on a une dérivation  $D$  sur  $A$ , alors on obtient un homomorphisme de  $A$  dans  $\Upsilon(A)$  par l'adjonction avec  $B = A$  et  $\varphi = id_A$ , l'application identité de  $A$ . Réciproquement, si on a un homomorphisme d'anneaux  $A \xrightarrow{h} \Upsilon(A)$ , alors on vérifie directement que  $D = \varepsilon_A \circ D_{\Upsilon(A)} \circ h$  est une dérivation sur  $A$ .

En particulier, pour  $A$  qui soit de caractéristique 0 où les entiers sont inversibles, c'est la propriété de  $(A[[T]], D_T)$  déjà observée, et dans ce cas  $(\Upsilon(A), D) \simeq (A[[T]], D_T)$ .

Notons que si  $A$  est de caractéristique non nulle, alors on ne retrouve pas en général les séries formelles. Par exemple, disons  $A$  un corps de caractéristique 2, et soit  $x \in \Upsilon(A)$  représenté par  $(0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ . Alors on a  $x^2 = 0$ , qui est représenté par  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ .



Si on considère une dérivation de Hasse<sup>7</sup> dans un anneau, c'est-à-dire une famille  $(D_n)_n \in \mathbb{N}$  d'applications telles que

$$(DH0) \quad D_0(x) = x$$

$$(DH1) \quad D_n(x + y) = D_n(x) + D_n(y)$$

$$(DH2) \quad D_n(xy) = \sum_{k+m=n} D_k(x)D_m(y)$$

$$(DH3) \quad D_k(D_m(x)) = \binom{k+m}{k} D_{k+m}(x).$$

On appellera anneau différentiel de Hasse un anneau muni d'une dérivation de Hasse. Alors la discussion ci-dessus s'applique mutatis mutandis. À savoir, soit ADIFH la catégories des anneaux différentiels de Hasse, et

$$U : \underline{ADIFH} \rightarrow \underline{A}$$

le foncteur d'oubli. Alors le foncteur  $U$  possède un adjoint à droite, disons  $\Upsilon_H$ , qui peut être représenté par l'anneau différentiel de Hasse libre à un générateur  $\mathbb{Z}[t_0]_{DH}$ . Or on voit que

$$\mathbb{Z}[t_0]_{DH} = \mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2, \dots]$$

avec la dérivation de Hasse donnée par  $D_n(t_0) = t_n$ . Ainsi on a encore une représentation

$$\begin{aligned} \Upsilon_H(A) &\simeq A^{\mathbb{N}} \\ x &\rightsquigarrow (a_0, a_1, a_2, \dots) \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon_A : \Upsilon_H(A) \rightarrow A$$

$$\varepsilon_A(a_0, a_1, \dots) = a_0$$

$$\varepsilon_A(D_n(x)) = a_n$$

et encore

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\underline{ADIFH}}(B, \Upsilon_H(A)) &\simeq \text{Hom}_{\underline{A}}(U(B), A) \\ \bar{\varphi} &\rightsquigarrow \varphi \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}(b) = (\varphi(b), \varphi(Db), \varphi(D_2b), \dots)$$

Mais cette fois on peut voir que  $\Upsilon_H(A)$  peut toujours s'identifier avec l'anneau des séries formelles  $A[[T]]$  (muni de la dérivation de Hasse déterminé par  $D_1(T) =$

---

7. L'axiome DH3 indique qu'on ne considère que des dérivations de Hasse *itératives*.

1,  $D_n(T) = 0$  si  $n > 1$ ). En effet, les opérations d'anneaux dans  $\Upsilon_H(A)$  sont données, avec l'identification, par

$$\begin{aligned}\varepsilon_A(D_n(x+y)) &= \varepsilon_A(D_n(x) + D_n(y)) \\ &= \varepsilon_A(D_n(x)) + \varepsilon_A(D_n(y)) \\ \varepsilon_A(D_n(xy)) &= \varepsilon_A\left(\sum_{k+m=n} D_k(x)D_m(y)\right) \\ &= \sum_{k+m=n} \varepsilon_A(D_k(x))\varepsilon_A(D_m(y))\end{aligned}$$

ou autrement dit, si  $x$  est représenté par  $(a_n)$  et  $y$  par  $(b_n)$  alors

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n) \\ (a_n) \cdot (b_n) &= \left(\sum_{k+m=n} a_k b_m\right)\end{aligned}$$

ce qui coïncide avec les opérations dans  $A[[T]]$ , vues sur les coefficients.

**3.2. Vecteurs de Witt.** Fixons un nombre premier  $p$ . Soient  $\underline{\delta A}$  la catégories des delta-anneaux (relatifs à  $p$ ), et  $U : \underline{\delta A} \rightarrow \underline{A}$  le foncteur d'oubli.

L'algèbre libre à un générateur  $t_0$  dans  $\underline{\delta A}$  est donné par l'anneau

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[t_0]_\delta &= \mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2, \dots] \\ \delta(t_0) &= t_1, \delta(t_i) = t_{i+1}\end{aligned}$$

où les  $t_i$  sont des indéterminées. L'objet initial dans  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}$ . L'objet initial dans  $\underline{\delta A}$  est  $(\mathbb{Z}, \delta_p)$ , avec  $\delta_p(k) = \frac{x-x^p}{p}$ . On a donc  $U((\mathbb{Z}, \delta_p)) = \mathbb{Z}$ , et  $U$  préserve l'objet initial. Le co-produit fibré dans  $\underline{A}$  est donné par le produit tensoriel. On note alors le même premier phénomène que dans le cas différentiel.

**Lemme 4.** *Supposons  $(A, \delta_A), (B, \delta_B), (C, \delta_C)$  des delta-anneaux, et  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$  des homomorphismes de delta-anneaux. Soient les homomorphismes naturels d'anneaux qui s'ensuivent  $i_1 : B \rightarrow B \otimes_A C$  et  $i_2 : C \rightarrow B \otimes_A C$ . Alors il existe une  $p$ -dérivation  $\delta$  sur  $B \otimes_A C$ , et une seule, telle que  $i_1, i_2$  soient des homomorphismes de delta-anneaux.*

La preuve de ce lemme n'est pas aussi directe que dans le cas différentiel car une  $p$ -dérivation n'est pas additive. Cependant, à tout delta-anneau est associé un endomorphisme, dit endomorphisme de Frobenius, défini par  $f(x) = x^p + p\delta(x)$ . Dans le cas d'un anneau sans  $p$ -torsion qui possède un endomorphisme  $\varphi$  tel que  $\varphi(x) \equiv x^p \pmod{p}$ , alors on obtient une structure de delta-anneau en posant  $\delta(x) = \frac{\varphi(x) - x^p}{p}$ , et  $\delta, \varphi$  se déterminent l'un l'autre. Pour prouver le lemme, on peut d'abord traiter le cas des anneaux sans  $p$ -torsion comme dans le cas différentiel en utilisant les endomorphismes de Frobenius (voir le prochain exemple §.3.3). On traite le cas général en utilisant le fait que tout delta-anneau est quotient d'un delta-anneau sans  $p$ -torsion.

On obtient de nouveau un foncteur adjoint à droite  $\Upsilon_\delta$  du foncteur d'oubli  $U$ , tel que  $\Upsilon_\delta(A)$  peut se représenter par  $A^\mathbb{N}$ . On a aussi que la donnée d'une  $p$ -dérivation

sur un anneau  $A$  est équivalent à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux de  $A$  dans  $\Upsilon_\delta(A)$ .

Pour faire le lien avec les vecteurs de Witt, on utilise une autre présentation du delta-anneau libre à un générateur, qu'on obtient à l'aide de l'unique suite d'opérateurs définie dans les delta-anneaux par

$$\delta_0(x) = x, \delta_1(x) = \delta(x), f^n(x) = \delta_0(x)^{p^n} + p\delta_1(x)^{p^{n-1}} + \dots + p^n\delta_n(x)$$

Le delta-anneau libre à un générateur peut alors être décrit de la façon suivante :  $\mathbb{Z}[u_0]_\delta = \mathbb{Z}[u_0, u_1, u_2, \dots]$ ,  $\delta_n(u_0) = u_n$ . On peut montrer que si  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p$ , alors  $\Upsilon_\delta(k)$  est isomorphe à  $W[k]$ .

Nous renvoyons à l'article de Joyal pour plus d'information.

**3.3. Endomorphismes.** Un anneau muni d'un endomorphisme fixé est appelé un anneau aux différences. On notera habituellement  $\sigma$  l'endomorphisme en question. Soient  $\underline{ADIF}$  la catégorie des anneaux aux différences et  $U : \underline{ADIF} \rightarrow \underline{A}$  le foncteur d'oubli.

L'algèbre libre à un générateur  $t_0$  dans  $\underline{ADIF}$  est donné par l'anneau

$$\mathbb{Z}[t_0]_\sigma = \mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2, \dots]$$

$$\sigma(t_0) = t_1, \sigma(t_i) = t_{i+1}$$

où les  $t_i$  sont des indéterminées. L'objet initial dans  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}$ . L'objet initial dans  $\underline{ADIFF}$  est  $(\mathbb{Z}, \sigma)$ , avec  $\sigma = id_{\mathbb{Z}}$  la fonction identité. On a donc  $U((\mathbb{Z}, \sigma)) = \mathbb{Z}$ , et  $U$  préserve l'objet initial. On note alors le phénomène déjà observé.

**Lemme 5.** *Supposons  $(A, \sigma_A), (B, \sigma_B), (C, \sigma_C)$  des anneaux aux différences, et  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$  des homomorphismes aux différences. Soient les homomorphismes naturels d'anneaux qui s'ensuivent  $i_1 : B \rightarrow B \otimes_A C$  et  $i_2 : C \rightarrow B \otimes_A C$ . Alors il existe un endomorphisme  $\sigma$  sur  $B \otimes_A C$ , et un seul, telle que  $i_1, i_2$  soient des homomorphismes aux différences.*

Preuve. On a

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \otimes_A C \end{array}$$

et  $\sigma_B, \sigma_C$  sont des homomorphismes d'anneaux. On obtient alors l'endomorphisme

$$\sigma = \sigma_B \otimes \sigma_C$$

qui a la propriété voulue.  $\square$

On obtient de nouveau un foncteur adjoint à droite  $\Upsilon_\sigma$  du foncteur d'oubli  $U$ , tel que  $\Upsilon_\sigma(A)$  se représente par  $A^{\mathbb{N}}$ . On a aussi, de façon analogue, que la donnée d'un endomorphisme d'un anneau  $A$  est équivalente à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux de  $A$  dans  $\Upsilon_\sigma(A)$ .

Cette fois, on peut aussi expliciter la structure  $\Upsilon_\sigma(A)$ . Considérons, comme on l'a fait précédemment, la représentation

$$\begin{aligned}\Upsilon_\sigma(A) &\simeq A^{\mathbb{N}} \\ x &\rightsquigarrow (a_0, a_1, a_2, \dots)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon_A : \Upsilon_\sigma(A) &\rightarrow A \\ \varepsilon_A(a_0, a_1, \dots) &= a_0 \\ \varepsilon_A(\sigma^n(x)) &= a_n \\ x &\rightsquigarrow (\varepsilon_A(x), \varepsilon_A(\sigma(x)), \varepsilon_A(\sigma^2(x)), \dots)\end{aligned}$$

et encore une fois

$$\begin{aligned}Hom_{\underline{ADIF}}(B, \Upsilon_\sigma(A)) &\simeq Hom_{\underline{A}}(U(B), A) \\ \bar{\varphi} &\rightsquigarrow \varphi\end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}(b) = (\varphi(b), \varphi(\sigma(b)), \varphi(\sigma^2(b)), \dots)$$

Les opérations d'anneaux dans  $\Upsilon_\sigma(A)$  sont données, avec l'identification, par

$$\begin{aligned}\varepsilon_A(\sigma^n(x+y)) &= \varepsilon_A(\sigma^n(x) + \sigma^n(y)) \\ &= \varepsilon_A(\sigma^n(x)) + \varepsilon_A(\sigma^n(y)) \\ \varepsilon_A(\sigma^n(xy)) &= \varepsilon_A(\sigma^n(x)\sigma^n(y)) \\ &= \varepsilon_A(\sigma^n(x))\varepsilon_A(\sigma^n(y))\end{aligned}$$

ou autrement dit, si  $x$  est représenté par  $(a_n)$  et  $y$  par  $(b_n)$  alors

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n) \\ (a_n) \cdot (b_n) &= (a_n b_n)\end{aligned}$$

ce qui coïncide avec les opérations composante à composante dans l'*anneau produit*  $A^{\mathbb{N}}$ . On constate aussi que l'endomorphisme  $\sigma$  de  $\Upsilon_\sigma(A)$  doit correspondre dans l'adjonction avec  $\varepsilon_A \circ \sigma : U\Upsilon_\sigma(A) \rightarrow A$  ( $B = \Upsilon_\sigma(A)$ ,  $\sigma = \bar{\varphi}$  ci-dessus). Cela permet de voir que, dans la représentation, l'endomorphisme  $\sigma$  de  $\Upsilon_\sigma(A)$  est donné par l'application de *décalage*, autrement dit

$$\sigma(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

On pourra faire l'exercice de considérer dans cette optique les anneaux munis d'un automorphisme, c'est-à-dire un endomorphisme injectif et surjectif, et d'identifier le foncteur adjoint à droite du foncteur d'oubli dans  $\underline{A}$  qui surgit. Ou encore les anneaux munis d'un endomorphisme injectif.

LUC BÉLAIR, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC-UQAM, C.P. 8888 SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3P8.

COURRIEL : BELAIR.LUC@UQAM.CA.